

Leçon 141 : Polynômes irréductibles en une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

[Ber] : *Algèbre, le grand combat*, Grégory Berhuy

[Goz] : *Théorie de galois*, Ivan Gozard

[Hau] : *Les contre-exemples en mathématiques*, Bertrand Hauchecorne

[Per] : *Cous d'algèbre*, Daniel Perrin

[Rom] : *Mathématiques pour l'agrégation*, Jean-Étienne Rombaldi

[Szp] : *Mathématiques Algèbre L3*, Aviva Szpirglas

I Partie A - Premier pas

I.1 Définitions et généralités [Goz] [Rom] [Ber]

■ **Déf 1 (Polynôme irréductible) :**

Rem 2 : Structure de l'anneau des polynômes, briques de bases.

■ **Ex 3 (Polynômes de degré 1) :**

■ **Ex 4 :** Exemples concrets (Voir [Rom])

■ **Ex 5 (Irréductibilité suivant l'anneau) :** Voir [Ber] ou en inventer un.

■ **Prop 6 (Irréductibilité et racines) :**

Thm 7 (Euclide) :

Thm 8 (D'Alembert-Gauss) :

I.2 Critères généraux d'irréductibilité [Goz]

■ **Prop 9 (Critère pour petit degré) :**

■ **Ex 10 :** Prendre dans $\mathbb{Q}[X]$ ou $\mathbb{F}_3[X]$.

■ **Déf 11 (Contenu) :**

■ **Prop 12 (Lemme de Gauss) :**

Thm 13 (Irréductibilité sur A et K) :

■ **Ex 14 :** Voir [Ber] ? Ou inventer.



Dév 15 (Transfert de Gauss) :

Thm 16 (Eisenstein) :

App 17 (Irréductibilité Φ_p) :

I.3 Irréductibilité sur $\mathbb{Z}$ et sur $\mathbb{Q}$ [Hau] [Goz] [Per]

■ **Prop 18 (Polynômes réductibles modulo p) :**

■ **Ex 19 :**

■ **Contre-Ex 20 :** Voir [Hau] et [Per] (Φ_8).

Thm 21 (Réduction modulo p) :

■ **Ex 22 :** Voir [Goz].

II Partie B - Extensions algébriques

II.1 Rappels sur les extensions finies [Goz]

■ **Prop 23 (Corps par quotient) :**

■ **Ex 24 ($\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$) :**

Thm 25 (Base télescopique) :

■ **Cor 26 (Multiplicativité du degré) :**

II.2 Éléments algébriques [Goz] [Ber] [Szp]

■ **Déf 27 (Élément algébrique, transcendant) :**

■ **Ex 28 :** Racines de l'unité, exemples classiques (voir [Szp]).

■ **Ex 29 :** Nombres de Liouville.

■ **Ex 30 :** π , e

■ **Déf 31 (Polynôme minimal) :**

■ **Ex 32 :** $\deg(\pi_x) = 1$ ssi $x \in K$

■ **Prop 33 :** P est le polynôme minimal de x ssi P est unitaire, irréductible et $P(x) = 0$.

Ex 34 : Pour $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, $X^n - 2$ est le polynôme minimal de $\sqrt[n]{2}$ sur $\mathbb{Q}$.

Thm 35 (Base de $K(a)$) :

Ex 36 : Voir [Ber].

Thm 37 (Caractérisation des éléments algébriques) :

II.3 Extension cyclotomiques [Goz]

Déf 38 (Corps cyclotomique) :

Déf 39 (Polynôme cyclotomique) :

Ex 40 : $\Phi_{1,\mathbb{Q}}(X) = X - 1$, $\Phi_{2,\mathbb{Q}}(X) = X + 1$, $\Phi_{3,\mathbb{Q}}(X) = X^2 + X + 1$, $\Phi_{4,\mathbb{Q}}(X) = X^2 + 1$

Prop 41 : $X^m - 1 = \prod_{d|m} \Phi_{d,\mathbb{Q}}(X)$.

Thm 42 : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Phi_{n,\mathbb{Q}}(X) \in \mathbb{Z}[X]$ et est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

App 43 : Le polynôme minimal de toute racine primitive n -ième est $\Phi_{n,\mathbb{Q}}(X)$, et $[\mathbb{Q}(\mathbb{U}_n) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$.

Thm 44 (Kronecker-Weber) :

Prop 45 (Automorphismes) :

III Partie C - Adjonction d'éléments

III.1 Corps de rupture [Goz] [Ber]

Déf 46 (Corps de rupture) :

Ex 47 : Voir [Ber]

Ex 48 : Construction de $\mathbb{F}_4$. [Annexe : Tables d'opérations].

Thm 49 (Existence et unicité du corps de rupture) :

App 50 : Si $P \in K[X]$, il existe une extension dans laquelle P possède une racine.

Thm 51 (Élément primitif) :

III.2 Corps de décompositions [Goz] [Ber]

Déf 52 (Corps de décomposition) :

Ex 53 : Voir [Szp].

Contre-Ex 54 : Voir [Szp].

Thm 55 (Existence et unicité du corps de décomposition) :

III.3 Application à la construction des corps finis [Per] [Goz]

Prop 56 (Frobenius) :

App 57 : Racine p -ième.

Thm 58 (Existence des corps finis) :

Rem 59 : Construction des corps fini comme corps de rupture.

Ex 60 : $\mathbb{F}_4$, $\mathbb{F}_8$ et $\mathbb{F}_9$ [Annexe : Table de $\mathbb{F}_4$].

IV Partie D - Applications à l'algèbre linéaire

IV.1 Valeurs propres dans une extensions [Rom]

Prop 61 (Valeur propres, polynôme minimal, polynôme caractéristique) :

Prop 62 (Polynôme minimal selon le corps) :

Ex 63 : Matrices de rotations...

Rem 64 : Intérêt de se placer dans un corps de décomposition

Ex 65 : Invariance de la trace et son calcul, pareil pour le det.

App 66 (Caractérisation des nilpotents) :

IV.2 Endomorphismes semi-simples [Rom]

Déf 67 (Endomorphismes semi-simples) :

Ex 68 : Diagonalisables.

 **Dév 69 (Caractérisation) :**

App 70 (Dunford) :